★★★

Épreuve de Maths	Royaume du Maroc	Examen National du
Filières : SMA - SMB	Ministère de l'Education Nationale	BACCALAURÉAT
Coefficient : 9	De la Formation professionnelle	Session Principale
Durée : 4 heures	de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	Juin 2008

■ Exercice Numéro 1 : (03,25 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}}=0$; $1_{\mathbb{R}}=1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$; $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$

Soit l'application définie ainsi (Avec $E^*=E\backslash\{M(0,0)\}$) :

$$\varphi\ :\ (\mathbb{C}^*,\times)\ \longmapsto\ (E^*,\times)$$
$$a+ib\ \longmapsto\ M(a,b)$$

0,75 **1 a** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0,50 **b** Montrer que la famille (I,J) est une base de l'espace $(E,+,\cdot)$.

0,25 **2 a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 **b** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0,50 **3** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0,75 **4** Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J\times X^3=I$.

■ Exercice Numéro 2 : (03,75 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit : (G) : $iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$; $(a,z)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$.

0,50 **1 a** Vérifier que $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$ avec Δ est le discriminant de (G) .

0,50 **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) .

0,50 **2** Montrer l'équivalence suivante : $a\in solutions(G)\iff\mathcal{Re}(a)=\mathfrak{Im}(a)$

II Soient : $A(a)$; $B(i\bar{a})$; $C(1+ia)$; $avec\ \ \mathcal{Re}(a)\neq\mathfrak{Im}(a)$.

0,50 **1 a** Montrer l'implication : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}\implies\bar{z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

0,50 **b** Montrer l'équivalence : $A\,;B\,;C\ sont\ colinéaires\iff\mathfrak{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

2 Soient les rotations : $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}\left(A\,;\frac{-\pi}{2}\right)$; $\mathcal{R}_2=\mathcal{R}\left(A\,;\frac{\pi}{2}\right)$; $\mathfrak{Im}(a)\neq\frac{1}{2}$.

Soient : $\mathcal{R}_1(B)=B'$; $\mathcal{R}_2(C)=C'$; $E=milieu[BC]$.

0,50 **a** Calculer : $c'=aff(C')$ et $b'=aff(B')$.

0,75 **b** Montrer que : $(AE)\perp(B'C')$ et $B'C'=2\,AE$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

I Soit l'équation : (E) : $35u - 96v = 1$; $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

0,25 **1** Vérifier que $(11,4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0,50 **2** En déduire la solution générale de l'équation (E).

II Soit l'équation : (F) : $x^{35} \equiv 2\,[97]$; $x \in \mathbb{Z}$.

0,50 **1** **a** Montrer que 97 est un nombre premier.

Puis Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \wedge 97 = 1$.

0,50 **b** Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x^{96} \equiv 1\,[97]$.

0,50 **c** Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \equiv 2^{11}\,[97]$.

0,25 **2** Montrer l'implication : $x \equiv 2^{11}\,[97] \Rightarrow x \in solutions(F)$.

0,50 **3** Montrer que l'ensemble des solutions de (F) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{S} = \left\{ (11 + 97k) \in \mathbb{N} \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - e^{-x^2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,50 **1** **a** Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x\right)$

0,50 **b** Calculer $f'(x)$; $\forall\, x \geq 0$ puis dresser le tableau de variations de f.

0,50 **c** Montrer que : $\exists!\ \alpha \geq 0$; $f(\alpha) = 0$ *et* $0 < \alpha < 1$.

0,50 **d** Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.

0,50 **2** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 **II** Soient φ *et* g les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad ; \quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad ; \quad x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 **1** **a** Montrer que : $(\forall\, x > 0), (\exists\, c \in]0,x[)$; $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-c^2}$

0,50 **b** En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt < 1$

0,50 **2** **a** Montrer que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,dt$

0,50 **b** Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que : $g'(x) = f(x)$; $\forall x \geq 0$

0,50 **c** Montrer que : $\exists!\ \beta \in]\alpha, 1[$; $g(\beta) = 0$.

0,50 **3** **a** Montrer que la fonction φ est continue à droite en zéro.

0,75 **b** Via une intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$$

0,25 **c** Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad \varphi'(x) = \frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$$

0,50 **d** Montrer que : $\varphi(\ [0,1]\ ) \subseteq [0,1]$.

0,25 **4** **a** Montrer que : $\forall x \geq 0$; $\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \leq \frac{x^3}{3}$

0,50 **b** Montrer que : $\forall x \in]0,1[$; $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$

0,25 **c** Montrer que : $\forall x > 0$; $\varphi(x) = x \iff g(x) = 0$

5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

0,25 **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 1$.

0,50 **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \beta| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

0,25 **c** En déduire que la suite (u_n) est convergente puis donner sa limite.